المحاضرة (٣) السبت ٢٢/٣/٢٠٢٠

5 – حالات عدم التعين وطرق إزالتها : باستخدام المشتقات

لقد مر معنا عند حساب نهايات بعض التوابع ، حالات من الشكل $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ وأطلقنا على طريقة إيجاد النهاية في مثل هذه الحالات بإزالة عدم التعين . سنحاول الآن أن نعطي طريقة مبسطة لإزالة عدم التعين في الحالتين المذكورتين باستخدام المشتق . لكن قبل الابتداء بذلك لابد من ذكر كل حالات عدم التعين الممكنة . هناك خمس حالات عدم تعيين أخرى بالإضافة لحالات عدم التعين السابقة هي

$$0^0 \ , \ \infty^0 \ , \ 1^\infty \ , \ \infty - \infty \ , \ 0 \times \infty$$

أولاً – حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

من أجل ازالة عدم التعين المذكورة نعتمد على النظرية التالية :

نظرية (1.5) قاعدة لوبتال :

ليكن $f(x)$ و $\varphi(x)$ تابعين قابلين للاشتقاق في جوار للنقطة a مع احتمال استثناء النقطة a نفسها [وهذا يعني انهما قابلين للاشتقاق من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $0 < |x-a| < \varepsilon$] . وليكن

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$$

و $\varphi(x) \neq 0$ من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $0 < |x-a| < \varepsilon$. إذا كانت النسبة $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ تنتهي إلى مقدار ثابت أو تتباعد إلى اللانهاية عندما تنتهي x إلى a فإن

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \qquad (1)$$

حفظ

البرهـــان :

بما أن نهاية النسبة $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ عندما $x \to a$ لاتتعلق بقيمة التابعين $f(x)$ و $\varphi(x)$ في النقطة $x=a$ ، لذلك يمكن أن نفترض أن $f(a) = \varphi(a) = 0$. وبناء على ذلك يكون

كل من f (x) و φ(x) مستمراً في النقطة x=a وبالتالي بما أنه قابل للاشتقاق في جوارها فانه يمكن تطبيق نظرية كوشي على المجال [a,x] ومنه

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(\lambda)}{\varphi'(\lambda)} \qquad (|\lambda-a|<|x-a|<\varepsilon)$$

لكن $\lambda\to a$ عندما $x\to a$. إذن ينتج

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{\lambda\to a}\frac{f'(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}=A$$

وهو المطلوب .

مثال (1.5) : أوجد

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{2x}-\mathrm{Ln}\,(x+e)}{\arcsin x}$$

الحـــل :

الصورة تنتهي إلى الصفر والمخرج ينتهي إلى الصفر عندما $x\to 0$ وبالتالي لدينا عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$. من أجل ازالة عدم التعيين نطبق قاعدة لوبتال

$$\varphi(x)=\arcsin x \qquad \& \qquad f(x)=e^{2x}-\mathrm{Ln}\,(x+e)$$

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad\qquad f'(x)=2e^{2x}-\frac{1}{x+e}$$

ومنه

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-\frac{1}{x+e}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=2-\frac{1}{e}$$

وهو المطلوب .

ملاحظة (2.5) :

قد يحدث أحياناً عند حساب النهاية $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$

] حيث $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0$ [بالاعتماد على قاعدة لوبتال أن نهاية

النسبة (عندما $x \to a$) $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ تشكل عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لذلك نطبق أيضاً

مرة ثانية قاعدة لوبتال على هذه النسبة وبالتالي يجب أن نحسب النهاية $\lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$.

ولكن قد يحدث أيضاً أن النهاية الجديدة تشكل عدم تعين من الشكل $\frac{0}{0}$ في هذه الحالة نطبق قاعدة لوبتال مرة ثالثة وهكذا حتى نحصل على النهاية المطلوبة . لكن يجب أن نتأكد في جميع الحالات التي نريد فيها تطبيق قاعدة لوبتال تحقق شروط النظرية (1.7).

مثال (2.5) : احسب

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - x\cos x}{x - \sin x}$$

الحـــل :

لدينا عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$.

مشتقات التوابع $f(x) = x - x\cos x$ و $\varphi(x) = x - \sin x$ موجودة و $\varphi'(x) \neq 0$ في جوار للصفر . حسب قاعدة لوبتال ينتج :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - x\cos x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x - x\cos x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + x\sin x}{1 - \cos x}$$

في هذه الحالة لدينا أيضاً عدم تعين من الشكل $\frac{0}{0}$ علاوة على ذلك $f'(x)$ و $\varphi'(x)$ قابلين للاشتقاق في جوار الصفر و $\varphi''(x) \neq 0$ $(x \neq 0)$. حسب قاعدة لوبتال ينتج

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + x\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x + x\cos x}{\sin x}$$

مرة ثالثة لدينا عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لذلك نطبق قاعدة لوبتال فنجد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x + \cos x - x\sin x}{\cos x} = 3$$

إذن النهاية تساوي 3 وهو المطلوب .

ملاحظة (3.5) :

ان النظرية السابقة صحيحة في الحالات المشابهة وهي عندما

$$x\to\infty \quad , \quad x\to+\infty \quad , \quad x\to-\infty \quad , \quad x\to a+0 \quad , \quad x\to a-0$$

مثال (3.5) : أوجد :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\,\mathrm{arc\,tg}\,x^2-\pi}$$

الحـــل :

لدينا عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$. حسب قاعدة لوبتال نجد

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\,\mathrm{arc\,tg}\,x^2-\pi} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{2\cdot\frac{2x}{1+x^4}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{1+x^4}{2x^4} =$$

$$= -\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

وهو المطلوب .

ملاحظة (4.5) :

إذا كانت النهاية $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ غير موجودة أو مختلفة عن ∞ فإن هذا لايعني ان النهاية $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ غير موجودة . في هذه الحالة لايمكن تطبيق قاعدة لوبتال هنا ولا يمكن معرفة نهاية النسبة بالاعتماد عليها .

مثال (4.5) :

احسب النهاية

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\operatorname{Ln}(1+x)}$$

الحـــل :

لدينا عزم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$. بفرض

$$\varphi(x) = \operatorname{Ln}(1+x) \quad \& \quad f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[2x(1+x) \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right]$$

والنهاية السابقة غير موجودة بل تأرجح بين -1 و $+1$ لذلك لايمكن الاعتماد هنا على قاعدة لوبتال وبالتالي لايمكن معرفة النهاية بالاعتماد على هذه الطريقة . من أجل حساب النهاية نتبع طريق آخر :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\operatorname{Ln}(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} \operatorname{Ln}(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cos \frac{1}{x}}{\operatorname{Ln}(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \frac{0}{1} = 0$$

وهو المطلوب .

ثانياً ـ حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

في هذه الحالة تطبق أيضاً قاعدة لوبتال والمحددة بالنظرية التالية :

نظرية (5.5) :

ليكن $f(x)$ و $\varphi(x)$ تابعين قابلين للاشتقاق في جوار للنقطة a مع احتمال استثناء النقطة a نفسها [وهذا يعني أنهما قابلان للاشتقاق من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $0 < |x-a| < \varepsilon$] وليكن كل من هذين التابعين يتباعد إلى اللانهاية عندما $x \to a$ و $\varphi(x) \neq 0$ من أجل جميع قيم x المحققة للمتراجحة $0 < |x-a| < \varepsilon$.

إذا كانت النسبة $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ تنتهي إلى نهاية محدودة أوتتباعد إلى اللانهاية عندما $x \to a$ فإن

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

سنقبل هذه النظرية بدون برهان .

مثال (5.5) : أوجد :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln tg(7x^2)}{\ln tg(2x^2)}$$

الحـــل :

عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ لذلك نطبق قاعدة لوتبال وذلك لأن كل من التابعين $f(x) = \ln tg(7x^2)$ و $\varphi(x) = \ln tg(2x^2)$ قابلين للاشتقاق في جوار للصفر و $\varphi'(x) \neq 0$. لنحسب

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{[tg(7x^2)]'}{tg(7x^2)}}{\frac{[tg(2x^2)]'}{tg(2x^2)}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{14}{\cos^2(7x^2)}}{tg(7x^2)} \times \frac{tg(2x^2)}{\frac{4x}{\cos^2(2x^2)}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{14x}{\cos 7x^2 . \sin 7x^2} \times \frac{\sin 2x^2 . \cos 2x^2}{4x} = \frac{7}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x^2}{\sin 14x^2} =$$

$$= \frac{7}{2} \lim_{x \to 0} \frac{8x . \cos 4x^2}{28x . \cos 14x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos 4x^2}{\cos 14x^2} = 1$$

اذن النهاية موجودة وتساوي الواحد وهو المطلوب .

ملاحظة (6.5) :

النظرية صحيحة من أجل الحالات الباقية أي عندما

$$x \to \infty \quad , \quad x \to -\infty \quad , \quad x \to +\infty \quad , \quad x \to a+0 \quad , \quad x \to a-0$$

مثال (6.5) : احسب :

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\text{Ln}\,(1-x^2)}{\text{tg}\,\frac{\pi}{2}\,x}$$

الحل :

لدينا عدم تعين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$. بفرض $f(x) = \text{Ln}\,(1-x^2)$
و $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}\,x$ نجد أن كليهما يقبل الاشتقاق في الجوار الأيسر للواحد وذلك
لأن $f(x)$ معرف من أجل قيم x الأصغر من الواحد . و $\varphi'(x) \neq 0$ لذلك
لنحسب المشتقات

$$\varphi'(x) = \frac{\pi}{2\cos^2 \frac{\pi}{2}\,x} \quad \text{و} \quad \varphi'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

بناء على ذلك لنحسب النهاية

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to 1-0} \frac{4x\cos^2 \frac{\pi}{2}\,x}{\pi\,(x^2-1)}$$

عدم تعين من الشكل $\frac{0}{0}$ لذلك نطبق القاعدة مرة ثانية

$$= \frac{4}{\pi} \lim_{x \to 1-0} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2}\,x - 2x \sin \pi\,x}{2x} = \frac{4}{\pi} \times \frac{0}{2} = 0$$

وهو المطلوب .

مثال (7.5) : احسب

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$$ (n عدد طبيعي)

الحـــل :

لدينا عدم تعين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ لذلك نطبق قاعدة لوبتال

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n\, x^{n-1}}$$

نطبق قاعدة لوتبال مرة أخرى لأنه لدينا عدم تعين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ فنجد

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n.x^{n-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}$$

وهكذا نطبق قاعدة لوتبال n مرة نجد

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$$

وهو المطلوب .

ملاحظة (7.5) :

عدم وجود النهاية $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ لايعني أن النهاية $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ غير موجودة . لكن يمكن القول إن قاعدة لوتبال لاتطبق في هذه الحالة . يوضح ذلك المثال التالي :

مثال (8.5) : احسب نهاية

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

الحـل :

لدينا عدم تعين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$. بفرض $f(x) = x + \sin x$ و $\varphi(x) = x$

لنحسب نهاية النسبة $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \to \infty} (1 + \cos x)$$

والنهاية غير موجودة لأنها تتأرجح بين الصفر و 2 . لذلك لايمكن تطبيق قاعدة لوتبال والنهاية المطلوبة لاتحسب بهذه الطريقة . نتبع طريقاً آخر هو

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1$$

وهو المطلوب .

ثالثاً ـ حالة عدم التعين من الشكل $0 \times \infty$.

ليكن $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty$

في هذه الحالة يكون

$$\lim_{x \to a} [\varphi(x) . f(x)] = \infty \times 0$$

عدم تعين من الشكل $0 \times \infty$. من أجل ازالة عدم التعين نحاول ارجاعه إلى الحالات السابقة من أجل ذلك نكتب

$$f(x) . \varphi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

وبالتالي المسألة أصبحت حالة عدم تعين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$. الجدير بالذكر هنا ان المسألة لاتتغير عندما $x \to +\infty$ أو $x \to -\infty$ أو $x \to \infty$ ، $x \to a - 0$ ، $x \to a + 0$.

مثال (9.5) : احسب

$$\lim_{x \to 0} [\, \text{Ln}(1+\sin^2 x) \,.\, \text{ctg}\, \text{Ln}^2(1+x) \,]$$

الحـــل :

لدينا عدم تعيين من الشكل $0 \times \infty$ لذلك نرجعه للشكل $\frac{0}{0}$ ثم بعد ذلك نطبق قاعدة لوتبال . إذن

$$\lim_{x \to 0} [\, \text{Ln}(1+\sin^2 x) \,.\, \text{ctg}\, \text{Ln}^2(1+x) \,] = \lim_{x \to 0} \frac{\text{Ln}(1+\sin^2 x)}{\text{tg}\, \text{Ln}^2(1+x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{2 \sin x \cos x}{1+\sin^2 x}}{2\,\{1+\text{tg}^2[\text{Ln}^2(1+x)]\,\} \,.\, \text{Ln}(1+x) \,.\, \dfrac{1}{1+x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\text{Ln}(1+x)} \,.\, \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)\cos x}{(1+\sin^2 x)\{\, 1+\text{Lg}^2[\,\text{Ln}^2(1+x)\,]\,\}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\text{Ln}(1+x)}$$

عدم تعين من الشكل $\frac{0}{0}$ لذلك نطبق قاعدة لوتبال فنجد

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{1}{1+x}} = 1$$

اذن النهاية المطلوبة تساوي الواحد .

رابعاً – عدم التعيين من الشكل $\infty - \infty$.

بفرض $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \to a} \varphi(x) = +\infty$

عند ذلك $\lim_{x \to a} [\, f(x) - \varphi(x) \,]$ يمثل عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$:

من أجل ازالة عدم التعيين نحاول ارجاعه للحالة $\frac{0}{0}$ وذلك حسب العلاقة

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot \varphi(x)}}$$

مثال (10.5) : احسب

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

الحـــل :

لدينا عدم تعين من الشكل $\infty - \infty$ بالاصلاح نجد

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

ويكون لدينا عدم تعين من الشكل $\frac{0}{0}$ فنطبق قاعدة لوتبال

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin 2x}{2x \sin^2 x + x^2 \sin 2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{2\sin^2 x + 4x\sin 2x + 4x^2 \cos 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{+4 \sin 2x}{6\sin 2x + 12x \cos 2x - 4x^2 \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{8 \cos 2x}{24 \cos 2x - 24x \sin 2x - 8x \sin 2x - 8x^2 \cos 2x} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

خامساً ـ حالات عدم التعيين من الأشكال ∞^0 ، 0^0 ، 1^∞ .

في هذه الحالة يجب إيجاد نهاية التابع

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{\varphi(x)} \qquad [f(x) > 0 \text{ لـ } a \text{ في جوار ما}]$$

(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1 \quad , \quad \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty \Rightarrow$

عدم تعين من الشكل ∞^0

(b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0 \Rightarrow$

عدم تعيين من الشكل 1^∞

(c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0 \Rightarrow$

عدم تعين من الشكل 0^0

في كل هذه الحالات نفرض $y = f(x)^{\varphi(x)}$ ثم نأخذ لوغرتم الطرفين

$$\text{Ln } y = \varphi(x) \text{ Ln } f(x)$$

في كل الحالات نحصل بذلك على عدم تعيين من الشكل $\infty \times 0$. لنفرض أن

$$\lim_{x \to a} (\text{Ln } y) = A$$

فإنه من كون التابع Ln مستمراً يمكن أن نكتب

$$\text{Ln}\left(\lim_{x \to a} y\right) = A \quad \text{أو} \quad \lim_{x \to a} y = e^A$$

مثال (11.5) : احسب

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

الحـــل :

لدينا عدم تعيين من الشكل 1^∞ لذلك نفرض

$$y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \quad \text{ومنه} \quad \text{Ln } y = \frac{1}{x^2} \text{Ln}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

عدم تعين من الشكل $0 \times \infty$ ، وبناء على ذلك نكتب

$$\text{Ln}\, y = \frac{\text{Ln}\, \frac{\sin x}{x}}{x^2}$$

وبالتالي نحصل على عدم تعين من الشكل $\frac{0}{0}$. نطبق قاعدة لوبتال فنجد

$$\lim_{x \to 0} \text{Ln}\, y = \lim_{x \to 0} \frac{\text{Ln}\, \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = + \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{- x \sin x + \cos x - \cos x}{3 x^2} =$$

$$= + \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{-1}{3} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{-1}{6} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} y = e^{-\frac{1}{6}} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

وهو المطلوب

مثال (12.5) : احسب نهاية

$$\lim_{x \to 0+0} x^{\frac{1}{\text{Ln}\,(e^x - 1)}}$$

الحـــل : بما أن

$$\lim_{x \to 0+0} (e^x - 1) = \infty$$

يكون لدينا عدم تعين من الشكل 0^0 .

لنفرض الآن :

$$y = x^{\frac{1}{\text{Ln}\,(e^x - 1)}} \quad \text{ومنه} \quad \text{Ln}\, y = \frac{1}{\text{Ln}\,(e^x - 1)} \text{Ln} x$$

وهذا يؤدي لعدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$. حسب قاعدة لوبتال نجد :

$$\lim_{x\to 0+0} Ln\, y = \lim_{x\to 0+0} \frac{Ln\, x}{Ln\,(e^x-1)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{e^x-1}{x\, e^x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{e^x}{e^x + x\, e^x} = 1$$

ومنه

$$\lim_{x\to 0+0} y = e^1 = e$$

وهو المطلوب .

سنتعرض الآن لبعض الأمثلة المحلولة حول نهايات التوابع :

مثال (13.5) : أوجد :

$$\lim_{x\to +\infty} (x - \sqrt{x^2-4})$$

الحـــل :

لدينا عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$. من اجل ازالة عدم التعين نضرب بالتابع $x+\sqrt{x^2-4}$ فنجد

$$\lim_{x\to +\infty} (x - \sqrt{x^2-4}) = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2-4})\,(x-\sqrt{x^2-4})}{x+\sqrt{x^2-4}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-(x^2-4)}{x+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x+\sqrt{x^2-4}} = 0$$

طريقة ثانية :

$$\lim_{x\to +\infty} (x-\sqrt{x^2-4}) = \lim_{x\to +\infty} x\,.\left[1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right]$$

عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$ لذلك نكتبه بالشكل

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}{\frac{1}{x}}$$

عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$. نطبق قاعدة لوبتال فنجد

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{8}{x^3}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = 0$$

وهو المطلوب .

مثال (14.5) : احسب

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x \sin \frac{7}{2^x}$$

الحل :

عدم تعيين من الشكل $0 \times \infty$ لذلك نكتب التابع بالشكل

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x \cdot \sin \frac{7}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \frac{7}{2x}}{\frac{1}{2^x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{7 \cdot \sin \frac{7}{2^x}}{\frac{7}{2^x}} = 7.1 = 7$$

وهو المطلوب .

مثال (15.5) : احسب

$$\lim_{x \to 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

الحل :

عدم تعين من الشكل $0 \times \infty$ نقسم على $(1-x)$ فنجد

$$\lim_{x \to 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\frac{1}{1-x}}$$

عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$. نطبق قاعدة لوبتال

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}}{\frac{1}{(1-x)^2}} = \frac{\pi}{2} \times \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}$$

عدم‌تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$. نطبق قاعدة لوبتال مرة ثانية

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{x\to 1} - \frac{2(x-1)}{2 \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1} - \cdot \frac{2x-2}{\sin \pi x} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2}{\pi \cos \pi x} = \frac{-2}{\pi \times (-1)} = \frac{2}{\pi}$$

وهو المطلوب .

مثال (16.5) : احسب

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

الحـــل :

عدم تعين من الشكل 1^∞ لذلك نفرض

$$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

ومنه

$$\operatorname{Ln} y = x \operatorname{Ln}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

اذن

$$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{Ln} y = \lim_{x\to +\infty} x \operatorname{Ln}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$ لذلك نقسم الصورة والمخرج على x فنجد

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' / \left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(x-1)-x-1}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{-\frac{x+1}{x^2(x-1)}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{(x-1)^2} \times -\frac{x^2(x-1)}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x(x-1)}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x-2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \ln \lim_{x\to+\infty} y = 2 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} y = e^2$$

اذن :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = e^2$$

وهو المطلوب .

مثال (17.5) : احسب

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}$$

الحـل :

لدينا عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$. نطبق قاعدة لوبتال

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\cos 2x + 2\sin 2x}{\cos x + \sin x} =$$

$$= \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

وهو المطلوب .

مثال (18.5) : احسب

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}$$

الحــل :

لدينا عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$. نطبق قاعدة لوبتال فنجد:

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}}} = \frac{3}{2} \times \lim_{x \to 1} x^{\left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim x^{\frac{1}{6}} = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

وهو المطلوب .

مثال (19.5) : احسب

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}$$

الحــل :

عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$. نطبق قاعدة لوبتال فنجد :

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x}}{1} = \alpha - \beta$$

مثال (20.5) : احسب

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \operatorname{Ln} x}{x - 1}$$

الحـــل :

عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$. نطبق قاعدة لوبتال فنجد

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{Ln} x + 1}{1} = 1$$

مثال (21.5) : احسب :

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\operatorname{Ln} x}{c \operatorname{tg} x}$$

الحـــل :

عدم تعين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$. نطبق قاعدة لوبتال

$$= \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \to 0+0} - \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} \times \lim(-\sin x) =$$

$$= 1 \times 0 = 0$$

مثال (22.5) : أوجد :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

الحـــل :

عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$. نطبق قاعدة لوبتال فنجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

وهو المطلوب .

مثال (23.5) : أوجد

$$\lim_{x\to 0+0} x^k \operatorname{Ln} x \qquad (0<k)$$

الحل :

عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$. لذلك نقسم على x^k الصورة والمخرج فنجد

$$\lim_{x\to 0+0} x^k \operatorname{Ln} x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\operatorname{Ln} x}{x^{-k}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-k\,x^{-k-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{-1}{k}\cdot\frac{1}{x^{-k}}=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0+0}(-x^k)=0$$

وهو المطلوب .

مثال (24.5) : احسب

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$$

الحل :

عدم تعيين من الشكل $\infty-\infty$. نوحد المخارج فنجد

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

عدم تعين من الشكل $\frac{0}{0}$. نطبق قاعدة لوبتال فنجد :

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

مثال (25.5) :

احسب نهاية التابع

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

الحل :

عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$. نطبق قاعدة لوبتال فنجد

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

وهو المطلوب .

مثال (26.5) : احسب

$$\lim_{x\to 1-0} \operatorname{Ln} x \cdot \operatorname{Ln}(1-x)$$

الحل :

عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$. نحول هذا إلى عدم تعين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1-0} \operatorname{Ln} x \cdot \operatorname{Ln}(1-x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{\operatorname{Ln} x}{\frac{1}{\operatorname{Ln}(1-x)}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{Ln}^2(1-x)} \cdot \frac{-1}{1-x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x} \cdot [(1-x)\operatorname{Ln}^2(1-x)] = \lim_{x\to 1-0} \frac{\operatorname{Ln}^2(1-x)}{\frac{x}{1-x}}$$

عدم تعين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$. نطبق قاعدة لوبتال أيضاً

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{2\,Ln(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}}{\frac{1-x+x}{(1-x)^2}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{-2\,Ln(1-x)}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1-0} \frac{-2\,\frac{-1}{1-x}}{\frac{1}{(1-x)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 1-0} 2(1-x) = 0$$

وهو المطلوب .

مثال (27.5) : احسب

$$\lim_{x\to 0-0} (1-2^x)^{\sin x}$$

الحـــل :

عدم تعيين من الشكل 0^0 لذلك نفرض $y = (1-2^x)^{\sin x}$ ثم نوجد $\lim_{x\to 0} Ln\, y$. وبذلك نحصل على عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$. ثم نرجع لعدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ ثم نطبق قاعدة لوبتال :

$$\lim_{x\to 0-0} Ln\, y = \lim_{x\to 0-0} \sin x \,.\, Ln(1-2^x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{Ln(1-2^x)}{\frac{1}{\sin x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0-0} \frac{\frac{-2^x Ln 2}{1-2^x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0-0} \frac{2^x\, Ln\, 2\,.\,\sin^2 x}{(1-2^x)\cos x} =$$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{Ln\, 2\,(2^x\, Ln\, 2 \sin^2 x + 2^x \sin 2x)}{-2^x\, Ln2 \cos x - (1-2^x)\sin x} = \frac{Ln2\,(1\times Ln2\times 0 + 1\times 0)}{-1\times Ln2\times 1 - 0\,(1-1)} = 0$$

بناء على ذلك

$$\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$$

وهو المطلوب .

مثال (28.5) : أوجد :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$$

الحل :

عدم تعيين من الشكل ∞^0 ، لذلك نفرض $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$ ونحسب

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{Ln} y$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{Ln} y = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \operatorname{Ln} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Ln} \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}$$

وهو عدم تعيين أيضاً ولكن من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$. نطبق قاعدة لوبتال فنجد :

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 0$$

من ذلك ينتج أن :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1$$

وهو المطلوب .