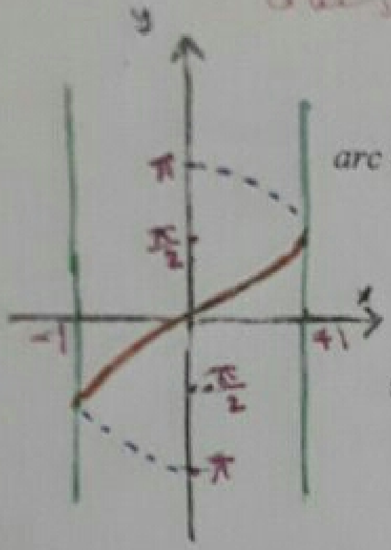
السبت ١٠/٣/ ٢٠٢٠ أحمد حمزة (٢)

الدوال العكسية المثلثية ومشتقاتها

ملاحظة: المطلوب فهم المحاضرة وحفظ فقط قوانين الاشتقاق



١- لنأخذ الدالة :

$$arc\sin : \left]-1,1\right[\to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \mapsto y=\sin^{-1}x = arc\sin x$$

وهي الدالة المعاكسة للدالة :

$$\sin : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \left]-1,1\right[$$
$$y \mapsto x=\sin y$$

حيث الدالة $x=\sin y$ مستمرة ومتزايدة

ولكي نوجد مشتق الدالة العكسية : $y=arc\sin x$

نشتق طرفي الدالة : $x=\sin y$

$$(x=\sin y)' \Rightarrow 1=(\cos y)\,y'_x \Rightarrow y'_x=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\mp\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\mp\sqrt{1-x^2}}$$

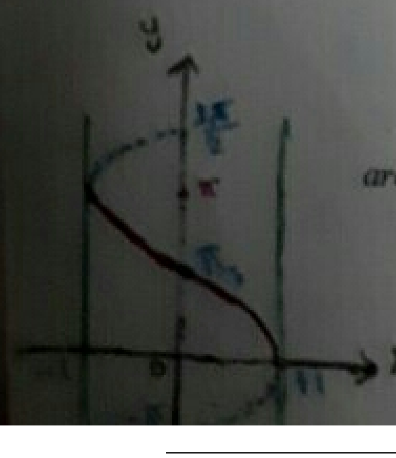
نختار الجذر الموجب لأن $\cos y>0$ على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

إذن حفظ $\boxed{y'_x=(arc\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ حيث $x\in\left]-1,1\right[$

وبشكل عام حفظ $\boxed{(arc\sin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$ حيث $u=u(x)$

ومنه $\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=arc\sin x+c}$

وبشكل عام $\boxed{\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=arc\sin\frac{x}{a}+c}$



٢- وبطريقة مماثلة نجد ان الدالة :

$$arc\cos : \left]-1,1\right[\to \left]0,\pi\right[$$
$$x \mapsto y=\cos^{-1}x = arc\cos x$$

هي الدالة المعاكسة للدالة :

$$\cos : \left]0\,,\pi\right[\;\rightarrow\; \left]-1\,,1\right[$$
$$y \;\mapsto\; x=\cos y$$

$$(x=\cos y)' \Rightarrow 1=(-\sin y)\, y'_x \Rightarrow y'_x=\frac{-1}{\sin y}=\frac{-1}{\mp\sqrt{1-\cos^2 y}}=\frac{-1}{\mp\sqrt{1-x^2}}$$

نختار الجذر الموجب لأن $\sin y>0$ على $\left]0\,,\pi\right[$

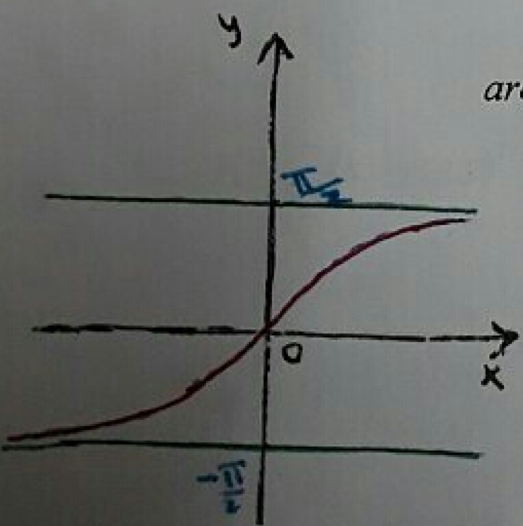
إذن حفظ $\boxed{y'_x=(arc\cos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$ حيث $x\in\left]-1\,,1\right[$

وبشكل عام حفظ $\boxed{(arc\, cox\, u)'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}}$ حيث $u=u(x)$

ومنه $\boxed{\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-arc\cos x+c}$

وبشكل عام $\boxed{\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-arc\cos\frac{x}{a}+c}$

٣- لنأخذ الدالة :



$$arc\, tg : \Re \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \mapsto y=tg^{-1}x=arc\,tg\,x$$

وهي الدالة المعاكسة للدالة :

$$tg : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \Re$$
$$y \mapsto x=tg\,y$$

ولكي نوجد مشتق الدالة العكسية : $y=arc\,tg\,x$

نشتق طرفي الدالة : $x=tg\,y$

$$(x=tg\,y)' \Rightarrow 1=(1+tg^2 y)\, y'_x \Rightarrow y'_x=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

حيث $1+tg^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}\neq 0$ على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

إذن حفظ $\boxed{(arc\ tg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}}$ حيث $x\in\ ]-\infty,+\infty[$

وبشكل عام حفظ $\boxed{(arc\ tg\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}}$ حيث $u=u(x)$

ومنه $\boxed{\int\frac{dx}{1+x^2} = arc\ tg\ x + c}$

وبشكل عام $\boxed{\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arc\ tg\ \frac{x}{a} + c}$

٤- بطريقة مماثلة نجد أن الدالة:

$$arc\ ctg : \Re \to\ ]0,\pi[$$
$$x \mapsto y = ctg^{-1}x = arc\ ctg\, x$$

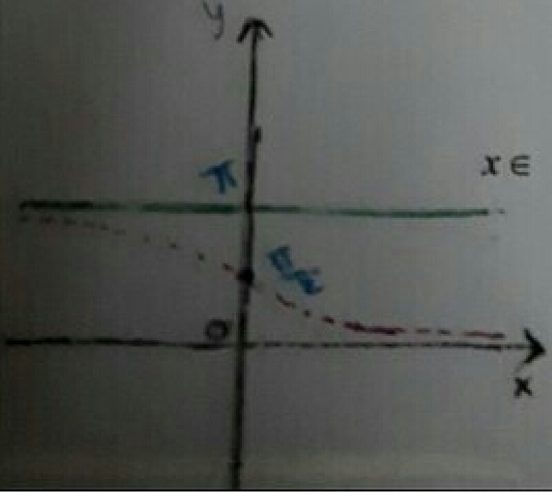
هي الدالة المعاكسة للدالة :

$$ctg :]0,\pi[\ \to \Re$$
$$y \mapsto x = ctg\, y$$

$$(x=ctg\, y)' \Rightarrow 1 = -(1+ctg^2 y)\, y'_x \Rightarrow y'_x = \frac{-1}{1+ctg^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}$$

حيث $1+ctg^2 y = \frac{1}{\sin^2 y}\neq 0$ على $]0,\pi[$

إذن حفظ $\boxed{(arc\ ctg\, x)' = \frac{-1}{1+x^2}}$ حيث $x\in\ ]-\infty,+\infty[$



وبشكل عام حفظ $\boxed{(arc\ ctg\, u)' = \frac{-u'}{1+u^2}}$ حيث $u=u(x)$

ومنه

$$\boxed{\int \frac{dx}{1+x^2} = -\, arc\ ctg\ x + c}$$

وبشكل عام

$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2+x^2} = -\frac{1}{a} arc\ ctg\ \frac{x}{a} + c}$$