السنة الأولى

صيدلة

السبت ٣/١٠/ ٢٠٢٠ المحاضرة (١)

الفصل الأول

المشتق والتفاضل

٢-١ مشتق تابع

ليكن لدينا التابع المعرف في مجال ما y ، نعطي x تغيرا Δx ، فتأخذ y تغيرا Δy ، فاذا كانت العلاقة القائمة بين x و y من الشكل $y = f(x)$: ، فان العلاقة الجديدة بين $x+\Delta x$ و $y+\Delta y$ تأخذ الشكل :

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

بحساب Δy نجد : $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

تشكل النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

نبحث الآن عن نهاية النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \to 0$ ، فاذا وجدت هذه النهاية ، دعوناها مشتق التابع $f(x)$ ورمزنا لها بـ $f'(x)$ ونكتب :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أو

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ان المشتق في الحالة العامة ، يأخذ قيما محددة مـن أجل قيم x المختلفة ، مما يقودنا الى القول ان المشتق تابع بدوره لـ x .

نرمز عادة لقيمة المشتق من أجل $x = a$ بـ $f'(a)$.

مثـال : احسب مشتق التابع $y = x^2$.

الحـل : نعطي لـ x تغيرا Δx فتأخذ y تغيرا Δy وتتشكل لدينا العلاقة :

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

نحسـب Δy :

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

نشـكل النسـبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

وبالانتقال الـى النهايـة :

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

فللتابع $y = x^2$ مشتق هو $y' = 2x$ • وقيمة هذا المشتق $y' = 6$ في النقطة $x = 3$

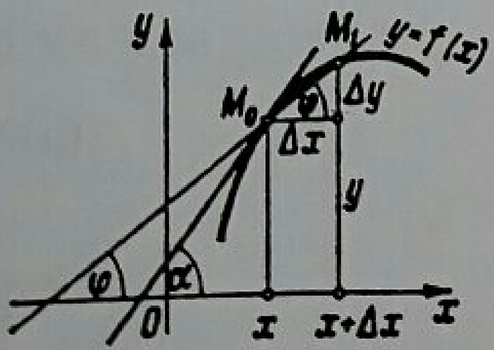
٣-٢ المعنى الهندسي للمشتق :

نشأ مفهوم المشتق من دراسة سرعة متحرك ، ومن الحاجة الى حساب ميل مماس لمنحني • وقد ظهرت هذه الدراسات في أعمال نيوتن ولايبنيز خلال القرن السابع عشر . وسنعالج الآن مسألة حساب ميل مماس لمنحن في نقطة معلومة منه• نرسم منحنيا ونحدد عليه نقطة ثابتة M_0 ، ثم نأخذ عليه نقطة أخرى M_1 • نرسم القاطع M_0M_1 الشكل (١٦) • فاذا اقتربت M_1 من M_0 بلا تناه ، اتخذ القاطع M_0M_1 أوضاعا مختلفة حتى يستقر في الموضع M_0T الذي ندعوه المماس للمنحني في النقطة M_0 • فاذا كانت $M_0(x,y)$ و $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ فان :

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

وتمثل النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ظل الزاوية φ التي يصنعها القاطع M_0M_1 مع الاتجاه الموجب للمحور $0x$ أي :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \varphi$$



الشكل (١٦)

فعندما $\Delta x \longrightarrow 0$ تقترب M_1 من M_0 ويدور القاطع حول M_0 الى أن يستقر في الموضع M_0T ، وتؤول الزاوية φ الى قيمة محددة α ونكتب :

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

ومنـه :

$$f'(x) = \tan\alpha$$

وهذا يعني أن قيمة المشتق $f'(x)$ من أجل قيمة معينة للمتحول x تساوي الـى ظل الزاوية التي يصنعها المماس للمنحني مع الاتجاه الموجب للمحور $0x$ فـي النقطـة M_0 •

٣-٢ تعـريف :

نقول ان للتابع $y=f(x)$ مشتقا في النقطة $x=x_0$ اذا وجدت النهاية :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

ونضيف أن التابع قابل للاشتقاق في النقطة $x=x_0$ •

مبرهنـة : اذا كان التابع قابلا للاشتقاق في النقطة $x=x_0$ ، فهو مستمر في هـذه النقطـة •

في الحقيقة اذا كان التابع قابلا للاشتقاق ، أمكننا أن نكتب :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

أو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \gamma$$

حيث γ مقدار يسعى الى الصفر عندما $\Delta x \to 0$ • ونكتب :

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \gamma \Delta x$$

وهذا يعني أن $\Delta y \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$ وبالتالي ، فالتابع مستمر في النقطة $x = x_0$ •

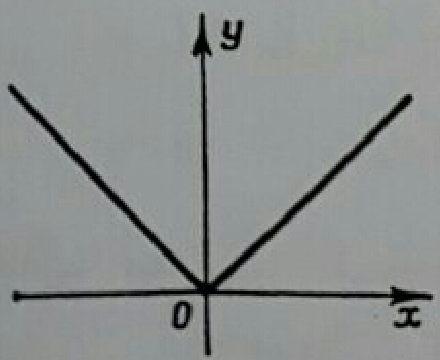
ملاحظة : قد يكون التابع مستمرا في نقطة دون أن يكون قابلا للاشتقاق في هذه النقطة ، ونسوق مثلا على ذلك •

مثال : لدينا التابع المعرف كالتالي :

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

ان هذا التابع مستمر في النقطة $x = 0$ • ولنجر عليه عملية الاشتقاق • في الحقيقة اذا كان $\Delta x > 0$ فان لدينا :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}$$



الشكل (١٧)

واذا كان $\Delta x < 0$ فان لدينا :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - \Delta x - 0}{\Delta x} = -1$$

والنهاية كما نرى تتوقف على اشارة Δx ، وهذا يعني أن ليس للتابع نهاية في النقطة $x = 0$.والتعليل الهندسي لهذا ، أنه ليس للتابع مماس في النقطة $x = 0$ الشكل (١٧) .

٣-٤ قواعد في حساب المشتقات :

مبرهنة ١ مشتق العدد الثابت يساوي الصفر .

فاذا كان $y = c$ فان $y' = 0$

مبرهنة ٢ مشتق الحداني $y = ax + b$ يساوي a .

مبرهنة ٣ مشتق مجموع عدد منته من التوابع يساوي الى مجموع مشتقاتها .

فمشتق : $y = u + v + w$ هو : $y' = u' + v' + w'$

مبرهنة ٤ مشتق جداء تابعين يساوي الى مشتق الاول في الثاني مضافا اليه مشتق الثاني في الاول .

فمشتق : $y = uv$ هو : $y' = u'v + uv'$

ملاحظة : تعمم هذه المبرهنة من أجل جداء عدد منته من التوابع .
فمشتق الجداء :

$$y = uvw, \ldots$$

هو :

$$y' = u'vw + uv'w + uvw' + \ldots$$

مبرهنــة ٥ مشـــتق التــابع : $y=u^n$

يعطى مشتق هذا التابع بالعبارة :

$$y'=nu^{n-1}u'.$$

مبرهنــة ٦ مشتق كسر عاذي يساوي مشتق الصورة في المخرج ، مطروحا منه مشتق المخرج في الصورة مقسوما على مربع المخرج ، أي أن مشتق التابع : $y=\frac{u}{v}$ هــو :

$$y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

مبرهنــة ٧ مشتق التابــع

$$y=\sqrt{u}$$

يعطــى بالعبــارة :

$$y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

سنعرض فيما يلي اثباتا لاحدى هذه المبرهنات ، وهي المبرهنة ٤ ويمكــن أن تتبع هذه الطريقة في التحقق من صحة المبرهنات الاخرى •

لدينا التابع $y=uv$ حيث v ، u وبالتالي y توابع لـ x ، نعطي لـ x تغيرا Δx فتأخذ التوابع Δu ، Δv ، Δy التغيرات Δu ، Δv ، Δy علــى الترتيب • ونكتــب :

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$$

ومنــه :

$$\Delta y=uv+v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v-uv$$

أو :

$$\Delta y=v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v$$

نشــكل النســبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نجــد :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

نبحث عن نهاية النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \lim_{\Delta x \to 0} u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) v + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

وبما أن $\Delta u \to 0$ و $\Delta v \to 0$. عندما $\Delta x \to 0$ نحصل على

$$y' = u'v + uv'$$

امثلـة محلولـة

مثـال ١ احسب مشتق التابع : $y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$

الحـل :

$$y' = \frac{x' \sqrt{1+x} - (\sqrt{1+x})' x}{1+x}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = \frac{2(1+x) - x}{2(1+x)\sqrt{1+x}} = \frac{x+2}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$$

مثـال ٢ احسب مشتق التابع : $y = (x^3 + 5x^2)^3$

الحـل :

$$y' = 3(x^3 + 5x^2)^2 (x^3 + 5x^2)'$$

$$y' = 3(x^3 + 5x^2)^2 (3x^2 + 10x)$$

مثـال ٣ احسب مشتق التابع : $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}$

الحـــل : نكتب هذا التابع بالشكل :

$$y = x^{\frac{3}{4}} + 2x^{-\frac{2}{5}}$$

ومنـــه :

$$y' = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} - \frac{4}{5} x^{-\frac{7}{5}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^7}}$$

٣ـ٥ مشتق التابع المركب (تابع التابع)

تعـــريف : نقول عن التابع $y=f(x)$ انه تابع مركب اذا كان هذا التابع معرفا بالنسبة لـ x بدلالة علاقة تحوي تابعا وسيطا • فاذا كان u تابعا لـ x من الشكل $u=\varphi(x)$ وكان y تابعا لـ u وفق العلاقة $y=F(u)$ قلنا ان y تابع لـ x • نسمي u بالتابع الوسيط •

مبرهنـــة : اذا كان للتابع u في نقطة ما x مشتق : $u'_x=\varphi'(x)$ وكـــان للتابع $y=F(u)$ في النقطة المقابلة u لـ x مشتق $y'_u=F'(u)$ فـــان للتابـــع المركب : $y=F[\varphi(x)]$ في النقطة المفروضة x مشتقا يساوي :

$$y'_x=F'_u(u)\,\varphi'(x)$$

ونكتب ذلك بالصيغة المختزلة :

$$y'_x=y'_u u'_x$$

٣ـ٦ مشتقات التوابع المثلثية :

مبرهنـــة ١ مشتق التابع $y=\sin x$ هو : $y=\cos x$.

البرهـــان : نعطي لـ x تغيرا Δx فتأخذ y تغيرا Δy ونكتب :

$$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$$

بحساب Δy :

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$

أو

$$\Delta y = 2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

نشكل النسبة :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

وبالانتقال الى النهاية :

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

وبما أن :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$$

يكون لدينا :

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

مبرهنة ٢ مشتق التابع $y=\cos x$ هو : $y'=-\sin x$.

نكتب هذا التابع بالشكل :

$$y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

باشتقاق هذا التابع نجد :

$$y'=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x$$

تطبيق : احسب مشتق التابع :

$$y = tgx$$

نكتب هذا التابع بالشكل :

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}$$

نطبق قاعدة اشتقاق كسر عادي فنجد :

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

امثلـة محلولـة

مثـال ١ احسب مشتق التابع :

$$y = \sin x^2 - \sin^2 x$$

الحـل :

$$y' = 2x\cos x^2 - 2\sin x \cos x$$

مثـال ٢ احسب مشتق التابع :

$$y = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

الحـل : نطبق قاعدة اشتقاق كسر عادي :

$$y' = \frac{-\cos x(1 + \sin x) - \cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2}$$

$$y' = \frac{-2\cos x}{(1 + \sin x)^2}$$