<u>التجربة الأولى</u>

معالجة المعطيات التجريبية

Analysis of an Experimental Data

1- الغاية من التجربة:

التدرب على استخراج العلاقات الفيزيائية من خلال معالجة معطيات التجارب الفيزيائية.

2- الموجز النظري:

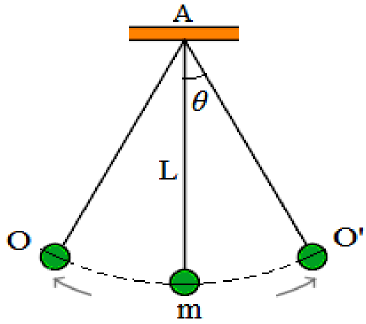
إن القوانين الفيزيائية هي علاقات بين مقدارين أو أكثر، نستطيع تمثيلها بتوابع رياضية. وقد يكون أحد هذه المقادير تابعاً لأكثر من متحول واحد، فتكون العلاقة أكثر تعقيداً. لإيجاد العلاقة الرياضية بين هذه المقادير نتبع طرائق عديدة، منها: الطريقة العددية، والطريقة البيانية.

سنوضح هنا طريقتين لاستنتاج القوانين الفيزيائية تعتمد الأولى على استنتاج القانون نظرياً انطلاقاً من بعض الفرضيات الأولية، ومن ثم التأكد من صحة القانون تجريبياً، أما الطريقة الثانية فتعتمد على إجراء التجربة واستخلاص النتائج التجريبية، ومن ثم معالجتها وصولاً إلى القانون الفيزيائي. سنركّز اهتمامنا هنا على الطريقة الثانية من خلال المثالين الآتيين:

<u>مثال A(تجربة حركة النواس البسيط):</u>

ندرس الحركة الجيبية لنواس بسيط مكوّن من كتلة m معلّقة إلى نقطة ثابتة A بوساطة خيط مهمل الكتلة يمكن التحكم بطوله L ضمن حقل قوة ثابتة F تسبب تسارعاً مقداره a مع إمكانية تغيير قيمة القوة؛ وبالتالي قيمة التسارع.

نفرض أن الكتلة m تتوس (نوسات صغيرة السعة) بين الوضعين O,O' اللذين يحددان الزاوية θ (أقل من 10 درجات) مع النقطة A. كما هو مبيّن في الشكل (1).



الشكل (1): الحركة الجيبية المدروسة.

تمسح الكتلة m خلال حركتها من النقطة O إلى النقطة O' المساحة S والتي يمكن تغيير قيمتها عن طريق تغيير طول خيط النواس L. عند تثبيت قيمة الزاوية θ فإن العوامل التي تؤثر في دور النواس هي المساحة S (المتعلقة بالطول L) والتسارع a.

إن قياس الدور T من أجل قيم مختلفة للمساحة S وللتسارع a يقود إلى الجدول الآتي:

الجدول (1): المعطيات التجريبية للتجربة من أجل $\theta = 3^o$:

S (m^2) / **a**(ms^{-2})	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.30**	**0.60**	**0.80**	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}$
1.0	4.94	7.39	8.78	11.56	13.74	14.77	1.00	1.00
4.0	2.47	3.69	4.39	5.78	6.87	7.38	0.25	0.50
9.0	1.65	2.46	2.93	3.85	4.58	4.92	0.11	0.33
16.0	1.24	1.85	2.20	2.89	3.44	3.69	0.06	0.25
25.0	0.99	1.48	1.76	2.31	2.75	2.95	0.04	0.20
36.0	0.82	1.23	1.46	1.93	2.29	2.46	0.03	0.17

نلاحظ أن كل زوج من قيم (S،a) يقابل قيمة للدور T.

إن الدور T يتبع كلاً من S,a أي $T = f(a,S)$ لمعرفة الصيغة الرياضية التي تربط بين المتحولات الثلاثة T,S,a نتبع طريقة تقوم على تثبيت أحد هذه المتحولات (S) ودراسة تغيرات المتحولين الآخرين (T,a) بدلالة بعضهما البعض؛ أي نقوم بدراسة تابعية الدور T للتسارع a من أجل قيمة ثابتة للمساحة S وذلك عن طريق رسم المنحني البياني لتغيرات T بدلالة a من أجل قيمة ثابتة للمساحة S. إن الحصول على خط مستقيم يدل على تناسب T مع a أي: $T = f(a)_{S=Const.}$ فإن لم يكن كذلك نبحث عن الاحتمالات الأخرى مثل: $T = f\left(\frac{1}{a}\right)_{S=Const.}$

و $T = f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)_{S=Const.}$... الخ، حتى الوصول على الحالة التي تؤمن علاقة خطية.

بالأسلوب نفسه ندرس وبطريقة الرسم البياني العلاقة بين S وT من أجل قيمة ثابتة لـa وكذلك نجرّب الاحتمالات الأخرى جميعها وصولاً إلى العلاقة التي تؤمن الخطية.

إن معرفة شكل العلاقة $T = f(a)_S$ وشكل العلاقة $T = f(S)_a$ يمكننا من معرفة شكل العلاقة $T = f(a,S)$.

رسم الخطوط البيانية:

لتحقيق الهدف المرجو من رسم الخطوط البيانية يجب رسمُها بدقةٍ كبيرة، وأن يكون المنحني البياني المرسوم انسيابياً ماراً بمعظم النقاط التجريبية أو يجاورها بحيث تتوزع النقاط على جانبيه.

نذكر فيما يأتي قواعد يستحسن أن يلتزم بها الطالب لدى رسمه للخطوط البيانية:

1) في حالة تمثيل النتائج على الورق الميليمتري، يخصص المحور الأفقي (محور الفواصل أو السينات) للمتحول x، والمحور العمودي عليه (محور التراتيب أو العينات) للتابع y. وينبغي أن يذكر على كل من المحورين اسم المقدار الفيزيائي الذي يمثل عليه أو رمزه، كما تذكر واحدة قياسه بين قوسين.

2) يقسم كل محور إلى واحدات رئيسة وجزئية تناسب تمثيل القيم العددية المعطاة في الجدول من أصغرها إلى أكبرها. وليس من الضروري أن يكون طول التقسيمة (أو التدريجة) الواحدة على المحور الأفقي مساوياً طول التقسيمة على المحور الشاقولي، ولا أن يبدأ تدريج أي منهما بالصفر، وذلك كي يشغل المنحني أكبر مساحة من ورقة الرسم.

3) استخدم تدريجات أساسية على المحورين بحيث تسهّل تجزئة المسافات (استخدام التقسيم الزوجي والابتعاد عن التقسيم الفردي).

4) إذا كانت القيم التي تمثلها على أحد المحورين أو على كليهما صغيرة للغاية أو كبيرة للغاية، فاستخدم عاملاً للضرب من قوى العشرة مثل: 10^{-3} أو 10^{5} ولا تستخدم أعداداً فيها أكثر من رقمين معنويين لتمثيل التدريجات الرئيسة على المحورين. ويكتب عامل الضرب عند طرف المحور باتجاه التزايد.

5) إذا ظهر أن النقاط التجريبية تتوزع على استقامة واحدة، فيسهل رسم مستقيم مار منها؛ وذلك لأن التعرف إلى استقامة الخط البياني أمر ممكن. من أهم مزايا الخط البياني المستقيم سهولة استنباط العلاقات منه؛ وذلك بملاحظة ميله، ونقطتي تقاطعه مع المحورين. ونشير إلى أنه عند حساب ميل الخط البياني، يجب التمييز بوضوح بين ما يسمى بالميل الهندسي، وما يسمى بالميل الفيزيائي.

a) - الميل الفيزيائي:

وهو يمثل في حالة الخط المستقيم نسبة تغير التابع Δy إلى تغير المتحول Δx مقيسين بالواحدات المستخدمة لكل منهما على محوره أي:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ويحسب عند التمثيل على الورق الميليمتري.

b) - الميل الهندسي:

وهو يساوي في حالة الخط المستقيم tgφ حيث φ هي الزاوية بين الخط المستقيم ومحور الفواصل. فهو إذن مقدار لا واحدة له؛ لأنه نسبة طولين جبريين ويختلف هذا الميل بالطبع باختلاف التقسيمات التي نتخذها على المحورين. وهذا الميل يحسب عند استخدام الورق اللوغاريتمي.

3- الأدوات المستخدمة:

أوراق ميليمترية - أوراق لوغاريتمية – أوراق نصف لوغاريتمية - مسطرة منحنيات مرنة.

4- مراحل العمل للمثال A:

ارسم على ورقة ميليمترية المنحني البياني لتحولات T بدلالة a من أجل قيمة ثابتة للمساحة S ولتكن $S=0.8m^2$ مثلاً وذلك عن طريق تمثيل قيم T على المحور الشاقولي وقيم a على المحور الأفقي وباعتماد تدريجات مناسبة على المحورين تضمن الاستفادة من أكبر مساحة من الورقة وتضمن إمكانية إجراء الاستقراء الداخلي والخارجي.

في حال تعذر تمثيل قيم T و a بكامل مراتبها المعنوية قرب المرتبة الأخيرة قبل تمثيلها على محورها.

استخدم مسطرة المنحنيات (أو المسطرة العادية المرنة) لرسم المنحني البياني بحيث يرمز أكبر عدد ممكن من النقاط بشكل انسيابي.

- أوجد الدور T من أجل قيم مختلفة للتسارع a من المنحني الناتج باستخدام طريقة الاستقراء الداخلي والاستقراء الخارجي.

- من الجدول (1) نلاحظ أن قيم T تتناقص بازدياد a لذلك قم برسم تحولات T بدلالة $\frac{1}{a}$ من أجل قيمة S الثابتة التي اخترتها في التجارب السابقة.

- إن تناسق الواحدات بين طرفي العلاقة $T = f(a,S)$ يوحي بأن T تتناسب مع $\frac{1}{\sqrt{a}}$ لذلك ارسم على ورقة ميليمترية ثالثة المنحني البياني لتحولات T بدلالة $\frac{1}{\sqrt{a}}$ من أجل قيمة ثابتة لـ S ($S=0.8\ m^2$) وفي حال الحصول على مستقيم ارسم المنحنيات البيانية لتحولات T بدلالة $\frac{1}{\sqrt{a}}$ من أجل قيم S الأخرى للتأكد من خطية العلاقة.

نختار قيمة ثابتة لـ a من أجل دراسة تحولات T بدلالة S ولتكن:

$a = 1ms^{-2}$. من المتوقع أن يكون T تتناسب مع S^n حيث n عدد صحيح ومن أجل إيجاد قيمة n من الممكن أن نتبع أسلوب التجريب الذي اتبعناه عند دراسة تحولات T بدلالة a ، ولكن يمكن حل المسألة بسهولة عن طريق رسم المنحني البدائي لتحولات T بدلالة S من أجل قيم ثابتة لـ a، ($a=1ms^{-2}$)، على ورقة لوغاريتمية وعند الحصول على مستقيم تكون n عبارة عن ميل هذا المستقيم (في هذه الحالة نقيس الميل الهندسي الذي يساوي الميل الفيزيائي).

- من أجل التأكد من خطية العلاقة، ارسم على الورقة اللوغاريتمية نفسها المنحنيات البيانية لتحولات T بدلالة S من أجل جميع قيم a واستنتج توازي المستقيمات الناتجة.

- وجدنا أن T يتناسب طرداً مع $\frac{1}{\sqrt{a}}$ أي $T \approx \frac{1}{\sqrt{a}}$ وكذلك وجدنا أن T يتناسب طرداً مع S^n أي $T \approx S^n$ وهذا يقود إلى أن $T \approx \frac{S^n}{\sqrt{a}}$.

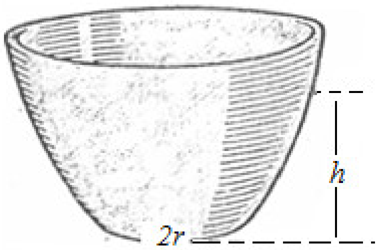
وهذا التناسب يتحول إلى تساوٍ عن طريق الضرب بثابت k؛ وبالتالي ينتج أن:

$$T = k.\frac{S^n}{\sqrt{a}}$$

حيث k ثابت يمكن حسابه بالتعويض المباشر من أجل عدة نقاط ومن ثم أخذ الوسطي لقيم k.

<u>مثال B (تجربة انفراغ حوض ماء):</u>

نفترض في هذا المثال أننا أجرينا تجربة على حوض ماء كالمبين في الشكل (1)، ومجهّز في أسفله بفتحة يمكننا تغيير نصف قطرها بين 0.5cm و 1cm، عندئذٍ يمكننا تحديد تبعية زمن انفراغ حوض ماء (تابع) t لأي فتحة قابلة للتغيير (المتحول الأول) معبّراً عنه بـ r نصف قطر الفتحة، ومن أجل ارتفاعات مختلفة h للماء في الحوض (المتحول الثاني). كما في الشكل (1).



الشكل (1): حوض انفراغ الماء.

وكالعادة تثبت قيمة معلومة أولى لأحد المتحولين، وليكن ارتفاع الماء h، ويقاس زمن الانفراغ من أجل قيم متزايدة لمساحة الفتحة، أي نصف قطرها r. ثم يغيّر ارتفاع الماء إلى قيمة معلومة ثانية وثالثة ورابعة، ويعاد العمل لكل منها.

لنفترض أننا حصلنا على نتائج قياس الزمن كتابع لنصف القطر، ومن أجل ارتفاعات مختلفة والمبينة في الجدول الآتي:

h (cm) r (cm)	**1.0**	**4.0**	**9.0**	**16.0**	$\frac{1}{r}\ (cm^{-1})$	$r^2\ cm^2$	$\frac{1}{r^2}\ (cm^{-2})$
0.50	12.1	95.8	323.8	768.8	2.0	4.00	0.25
0.60	8.3	66.5	225.2	533.8	1.7	2.89	0.35
0.70	6.0	48.8	164.7	392.2	1.4	1.96	0.51
0.80	4.6	37.7	25.8	299.7	1.3	1.69	0.59
0.90	3.8	29.4	99.7	237.3	1.1	1.21	0.83
1.00	2.9	23.8	80.9	191.7	1.0	1.00	1.00

يحتوي الجدول في سطره العلوي على قيم ارتفاع الماء h في الوعاء، وفي عموده الأيسر على قيم نصف قطر فتحة الحوض r. أما باقي الأعمدة فتحتوي زمن انفراغ الحوض t، مقدراً بالثواني. إذ نحصل منه على الزمن الموافق لأية قيمتين h و r واردتين في الجدول.

أما إذا لم تكن قيم أحد المتحولين h و r واردة في جدول النتائج التجريبية؛ فلا نستطيع معرفة قيمة زمن الانفراغ من الجدول مباشرة. ولحل مثل هذه المشكلة بصورة عامة يجب معرفة العلاقة الرياضية التي تربط زمن الانفراغ t مع كل من المتحولين h و r. وهذه العلاقة بدورها يمكن أن تعطينا معلومات إضافية لحالات غير واردة في الجدول سواء بالاستقراء الداخلي أو الخارجي.

من أجل الحصول على هذه العلاقة، لابد من الحصول على علاقة كل من المتحولين h و r على حدة بزمن الانفراغ t . لهذه الغاية سوف نقوم بالتمثيل البياني لتغير التابع t بدلالة المتحول r من أجل قيم ثابتة مختارة للارتفاع h. فإذا كانت هذه الخطوط البيانية مستقيمة استخرجت العلاقة التابعية:

$$t = a\, r + b$$

حيث a و b ثوابت تحدد من الخط البياني. أو في الحالة العامة $t = f(r)$. وإذا لم تكن الخطوط البيانية مستقيمات نقوم بردها إلى الخط المستقيم بإحدى الطرق المعروفة، بتجريب توابع رياضية مختلفة مثل: r^n ، r^{-n} ، $e^{a\,r}$.....الخ، حيث n عدد صحيح أو كسري. ففي الحالتين الأولى والثانية يتم باستخدام الورق اللوغاريتمي، أما الحالة الثالثة باستخدام الورق نصف اللوغاريتمي. أي إذا كتبنا العلاقة الرياضية بالشكل: $y = x^n$ بأخذ لوغاريتم طرفي العلاقة تصبح: $\ln y = n \ln x$ أو $Y = n\, X$.
أما الحالة الثانية: $y = e^{a\,x}$ تصبح بعد أخذ لوغاريتم طرفي العلاقة: $\ln y = a\, x$ أو بالشكل: $Y = a\, x$.

نقوم كذلك برسم الخط البياني لتحولات الزمن t بدلالة الارتفاع h ، من أجل قيم مختارة لنصف قطر الفتحة r. وذلك بغية الوصول إلى العلاقة الخطية بين t و h ،

أي: $t = f(h)$. ومن ثم تركيب العلاقتين مع بعضهما للوصول إلى العلاقة الشاملة بين التابع والمتحولات أي: $t = f(r,h)$.

5- مراحل العمل للمثال B:

1 – ارسم على ورقة ميليمترية الخط البياني لتحولات t (المحور الشاقولي) بدلالة r (المحور الأفقي) من أجل قيمة محددة وثابتة للارتفاع h ولتكن $4.0\,\mathrm{cm}$؛ مستخدماً تدريجات مناسبة على كل من المحورين بحيث تغطي كامل مساحة الورقة تقريباً، وتسهل قراءة القيم الصحيحة والعشرية، وتسهل إجراء عملية الاستقراء الداخلي والخارجي (ليس بالضرورة أن تكون سعة تدريجات المحورين متماثلة). عند تمثيل النقطة البيانية على المنحني يجب مراعاة مقدار الارتياب في إحداثيات النقطة؛ أي: $r \pm \Delta r$ ،$t \pm \Delta t$ ، فنحصل على ما يسمى مستطيل الارتياب الذي يكون محيطاً بكل نقطة تجريبية. قم بوصل النقاط التي حصلت عليها بواسطة المسطرة المرنة إن أمكن بحيث يمر من أكبر عدد من النقاط بشكل انسيابي (ليس من الضروري أن يمر الخط البياني من النقطة تماماً بل يمكن أن يمر الخط من أي مكان من مستطيل الارتياب). ماذا تلاحظ؟ وماذا تستنتج؟

2 – قم بإجراء عملية الاستقراء الداخلي على المنحني السابق للحصول على زمن تفريغ الوعاء، وذلك من أجل قيمة لنصف قطر الفتحة غير واردة في الجدول المعطى في التجربة. ولتكن مثلاً $r = 0.65\ cm$. ويتم ذلك برفع عمود من القيمة المعطاة لنصف القطر(محور السينات) حتى يتقاطع مع المنحني، ثم إسقاط عمود من نقطة التقاطع على محور الزمن (محور العينات) واستنتاج قيمة الزمن الموافق. كرِّر العملية السابقة من أجل الاستقراء الخارجي. أي قيمة نصف القطر تقع خارج القيم المعطاة في الجدول. و لتكن $r = 1.20\ cm$ مع بقاء قيمة h، ثابتة.

3 – نجد من المنحني المرسوم في الطلب الأول أن العلاقة بين t وr ليست خطية؛ لذلك يجب البحث عن هذه العلاقة. لكن بمحاكمة بسيطة للقيم الموجودة في الجدول

نلاحظ أن العلاقة عكسية بين t و r. فهل هي من الدرجة الأولى، الثانية، الثالثة،...الخ؟. إن r هي نصف قطر الفتحة، فهل تمثل مساحة الفتحة؟ استنتج إذن العلاقة بين t و h، وقم برسم على ورقة ميليمترية الخط البياني لهذه العلاقة، وذلك من أجل القيمة المختارة للارتفاع h. ماذا تستنتج؟ ناقش.

4 - ارسم على ورقة ميليمترية الخط البياني لتحولات t (المحور الشاقولي) بدلالة h (المحور الأفقي) من أجل قيمة محددة وثابتة لنصف القطر r، ولتكن $1.00\ \text{cm}$. ماذا تلاحظ؟ وماذا تستنتج؟ وهل العلاقة خطية؟

5 – يمكن أن تكون علاقة t و h بالشكل $t = h^n$ ، حيث n عدد صحيح أو كسري موجب أو سالب. وكما أشرنا أعلاه نستطيع رد هذه العلاقة إلى علاقة خطية بسيطة وتحديد ثوابتها باستخدام اللوغاريتم ثم رسم قيم لوغاريتم المقدارين على ورقة ميليمترية. أو برسم تحولات t بدلالة h على ورقة لوغاريتمية مباشرة (حاول أن تعرف هذا النوع من الورق وطريقة استخدامه). ماذا تلاحظ؟ استنتج قيمة n من المنحني (الميل الهندسي).

6 – من الطلبين3 و5 نجد علاقة الزمن t بكل من r و h على حدة. وكما هو معروف في الرياضيات أنه عندما يتناسب مقدار مع مقدارين فهو يتناسب مع جدائهما. أوجد هذه العلاقة، وقم بتحديد الثوابت فيها، واكتبها على شكل قانون فيزيائي.

7 – جرّب رسم خطوط بيانية أخرى من أجل قيم مختلفة لكلٍ من r و h ، وتحقق من صحة ما توصّلت إليه في الطلب السابق.

8 - بفرض انك حصلت على العلاقة من الشكل:

$$t = k \cdot \frac{h^n}{r^2}$$

حيث k ثابت يمكن حسابه بالتعويض المباشر من أجل عدة نقاط ومن ثم أخذ الوسطي لقيم k، والمطلوب حساب قيمة الثابت k من أجل ثلاث نقاط اختيارية وحساب الوسطي لهذا الثابت.